18o online μάθημα

27/5/2020

Αν ο έλεγχος:

$H_0: a_1 = a_2 = \dots = a_I$

απορρίπτεται το ερώτημα που προκύπτει είναι ποιο επίπεδο του παράγοντα ή ποια επίπεδα του παράγοντα ασκούν σημαντικότερη επίδραση στην Y.

Απάντηση: ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ

$H_0: \alpha_u = \alpha_v$ για κάθε ζεύγος $u, v$

Πληθώρα μεθόδων
Εμείς θα δούμε την λεγόμενη μέθοδο της Ελάχιστης Σημαντικής Διαφοράς - Ε.Σ.Δ (L.S.D)

Ιδέα: θέλω έλεγχο της $H_0: \alpha_u = \alpha_v$
ή της $H_0: \alpha_u - \alpha_v = 0$

Ποιος ο εκτιμητής της $\mu_u - \mu_v$;
Είναι $\hat{\alpha}_u - \hat{\alpha}_v = (\bar{Y}_{u\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}) - (\bar{Y}_{v\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}) = \bar{Y}_{u\cdot} - \bar{Y}_{v\cdot}$
Θα βρω την κατανομή του υπό της υπόθεσης για τα σφάλματα:

$$\bar{Y}_{u\cdot} = \frac{1}{n_u} \sum_{j=1}^{n_u} Y_{ij} \sim N(\mu + \alpha_u, \sigma^2/n_u)$$

$$\bar{Y}_{v\cdot} \sim N(\mu + \alpha_v, \sigma^2/n_v)$$

Άρα $\bar{Y}_{u\cdot} - \bar{Y}_{v\cdot} \sim N\left(\alpha_u - \alpha_v, \sigma^2\left(\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_v}\right)\right)$

Άρα

$$\frac{\bar{Y}_{u\cdot} - \bar{Y}_{v\cdot}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_v}}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

Όμως $\sigma^2$ άγνωστη. Είδαμε όμως ότι $E(MS_{res}) = \sigma^2$ και

$$\frac{SS_{res}}{\sigma^2} \sim X^2_{N-I}$$

Επομένως

$$t = \frac{\bar{Y}_{u\cdot} - \bar{Y}_{v\cdot}}{\sqrt{MS_{res}}\sqrt{\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_v}}} \overset{H_0}{\sim} t_{N-I}$$

Και περιοχή απόρριψης $|t| \geq t_{\alpha/2, N-I}$

## ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΚΑΤΑ 2 ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΧΩΡΙΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ

Στα προηγούμενα μελετήσαμε την επίδραση ενός παράγοντα πάνω σε μια εξαρτημένη μεταβλητή. Τώρα το ενδιαφέρον μας στρέφεται στην μελέτη της ταυτόχρονης επίδρασης ΔΥΟ παραγόντων πάνω στην εξαρτημένη μεταβλητή. Η μελέτη αυτή διακρίνεται σε μελέτη

ΜΕ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

ΧΩΡΙΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ.

- Επεξήγηση του όρου αλληλεπίδραση
- Θα περιοριστούμε εδώ στη μελέτη του μοντέλου χωρίς αλληλεπίδραση
- Έχουμε λοιπόν ένα παράγοντα A (π.χ. μόρφωση) με I επίπεδα και έναν παράγοντα B με J επίπεδα

Οι δύο παράγοντες ουσιαστικά δημιουργούν $I \cdot J$ το πλήθος συνδυασμούς. Εμείς θα περιοριστούμε στη συνέχεια σ' εκείνη την ειδική περίπτωση όπου σε κάθε συνδυασμό (ΑΠΟ ΕΔΩ ΚΑΙ ΠΕΡΑ ΚΕΛΙ Ή ΚΥΨΕΛΙΔΑ) υπάρχει διαθέσιμη μία παρατήρηση.

Σχηματικά

| ΠΑΡΑΓ. A \ ΠΑΡ. B | 1 | 2 | ... | J |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $Y_{11}$ | $Y_{12}$ | ... | $Y_{1J}$ |
| 2 | $Y_{21}$ | $Y_{22}$ | ... | $Y_{2J}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| I | $Y_{I1}$ | $Y_{I2}$ | ... | $Y_{IJ}$ |

Συμβολίζω $Y_{ij}$ την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής, στο i-οστό επίπεδο του ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ Α και στο j-οστό επίπεδο του ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ Β.

Συμβολισμός:

$$Y_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{I} Y_{ij} \quad , \quad j = 1, \ldots, J$$

$$\bar{Y}_{\cdot j} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} Y_{ij} = \frac{1}{I} Y_{\cdot j} \quad , \quad j = 1, \ldots, J$$

$$Y_{i \cdot} = \sum_{j=1}^{J} Y_{ij} \quad , \quad i = 1, \ldots, I$$

$$\bar{Y}_{i \cdot} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} Y_{ij} = \frac{1}{J} Y_{i \cdot} \quad , \quad i = 1, \ldots, I$$

$$Y_{\cdot\cdot} = \sum_{i} \sum_{j} Y_{ij}$$

$$\bar{Y}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i} \sum_{j} Y_{ij} = \frac{1}{I \cdot J} Y_{\cdot\cdot}$$

Σχηματικά:

| ΠΑΡ. Α \ ΠΑΡ. Β | 1 | 2 | ... | J | ΣΥΝΟΛΟ | Μ.Ο. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $Y_{11}$ | $Y_{12}$ | | $Y_{1J}$ | $Y_{1\cdot}$ | $\bar{Y}_{1\cdot}$ |
| 2 | $Y_{21}$ | $Y_{22}$ | | $Y_{2J}$ | $Y_{2\cdot}$ | $\bar{Y}_{2\cdot}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| I | $Y_{I1}$ | $Y_{I2}$ | | $Y_{IJ}$ | $Y_{I\cdot}$ | $\bar{Y}_{I\cdot}$ |
| ΣΥΝΟΛΟ | $Y_{\cdot 1}$ | $Y_{\cdot 2}$ | | $Y_{\cdot J}$ | $Y_{\cdot\cdot}$ | |
| Μ.Ο. | $\bar{Y}_{\cdot 1}$ | $\bar{Y}_{\cdot 2}$ | | $\bar{Y}_{\cdot J}$ | | |

Μοντέλο

$$Y_{ij} = \mu + a_i + b_j + \varepsilon_{ij}$$

$$i = 1, \dots, I \quad , \quad j = 1, \dots, J$$

όπου

$\mu$ : κοινή επίδραση στην Y όλων των επιπέδων

$a_i$ : ατομική επίδραση του i-οστού επιπέδου του παράγοντα A

$b_j$ : ατομική επίδραση του j-οστού επιπέδου του παράγοντα B

$\varepsilon_{ij}$ : σφάλμα

Εκτίμηση με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων

$$S = S(\mu, a_1, \dots a_I, b_1 \dots b_J) = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - (\mu + a_i + b_j))$$

Είναι

$$S = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - 2\sum_i \sum_j (\mu + a_i + b_j) Y_{ij} + \sum_i \sum_j \mu^2 + \sum_i \sum_j a_i^2 + \sum_i \sum_j b_j^2 +$$

$$+ 2\sum_i \sum_j \mu a_i + 2\sum_i \sum_j \mu b_j + 2\sum_i \sum_j a_i b_j$$

Δηλαδή

$$S = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - 2\mu \sum_i \sum_j Y_{ij} - 2\sum_i a_i Y_{i.} - 2\sum_j b_j Y_{.j} + IJ\mu^2 +$$

$$+ J\sum_i a_i^2 + I\sum_j b_j^2 + 2\mu J \sum_i a_i + 2\mu I \sum_j b_j + 2\sum\sum a_i b_j$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow -2\sum_i \sum_j Y_{ij} + 2IJ\mu + 2J\sum_i a_i + 2I\sum_j b_j = 0$$

ή ισοδύναμα

$$IJ\mu + J\sum_i a_i + I\sum_j b_j = Y_{..}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0 \Rightarrow -2Y_{i.} + 2Ja_i + 2\mu J + 2\sum_j b_j = 0$$

ή ισοδύναμα

$$J\mu + Ja_i + \sum_j b_j = Y_{i.} \qquad i = 1 \dots I$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j} = 0 \Rightarrow -2Y_{\cdot j} + 2I\beta_j + 2\mu I + 2\sum_i a_i = 0$$

ή ισοδύναμα

$$I\mu + I\beta_j + \sum_i a_i = Y_{\cdot j} \qquad j = 1, 2, \dots, J$$

Παρατήρηση: Το σύστημα που προκύπτει δεν έχει μοναδική λύση διότι

$$\sum_{i=1}^{I} \{ J\mu + Ja_i + \sum_{j=1}^{J} \beta_j \} = \sum_{i=1}^{I} Y_{i\cdot}$$

ή

$$IJ\mu + J\sum_{i=1}^{I} a_i + I\sum_{j=1}^{J} \beta_j = Y_{\cdot\cdot}$$

Επίσης

$$\sum_{j=1}^{J} ( I\mu + I\beta_j + \sum_{i=1}^{I} a_i ) = \sum_{j=1}^{J} Y_{\cdot j}$$

ή

$$IJ\mu + I\sum_{j=1}^{I} \beta_j + J\sum_{i=1}^{I} a_i = Y_{\cdot\cdot}$$

Άρα για να έχει μοναδική λύση $\rightarrow$ ΠΛΕΥΡΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ